MATEMÁTICA DISCRETA
Segundo cuatrimestre - Año 2015

Práctico 1

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

1. Mediante inducción matemática, verifique que cada ecuación es verdadera para todo entero positivo n.

   a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n\,(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

   b) $\sum_{i=1}^{n} i\,(i!) = (n+1)! - 1$

   c) $1^2 - 2^2 + 3^2 - ... + (-1)^{n+1}\, n^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}$

   d) $\sum_{j=1}^{n} j^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

   e) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

   f) $\cos x + \cos 2x + ... + \cos nx = \frac{cos[(x/2)(n+1)]sen(nx/2)}{sen(x/2)}$ siempre que $sen\,(x/2) \neq 0$.

2. Pruebe por inducción matemática que si θ es cualquier número real,

$$sen\,(\theta + n\pi) = (-1)^n\, sen\ \theta.$$

3. Utilice el principio de inducción para verificar cada desigualdad.

   a) $\frac{1}{2n} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... (2n)}$ para $n = 1, 2, ...$

   b) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... (2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ para $n = 1, 2, ...$

   c) $2n + 1 \leq 2^n$ para $n = 3, 4, ...$

   d) $2^n \geq n^2$ para $n = 4, 5, ...$

   e) $(1+x)^n \geq 1 + nx$ para $x \geq -1$ y $n \geq 1$.

4. Use la suma geométrica para probar que si $0 < r < 1$,

$$r^0 + r^1 + ... + r^n < \frac{1}{1-r}$$

   para todo entero no negativo n.

5. Pruebe que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} < 2$$

   para toda $n \geq 1$.

6. Use el principio de inducción matemática para probar cada afirmación.

a) $7^n - 1$ es divisible entre 6 para todo número natural n.

b) $6 \cdot 7^n - 2 \cdot 3^n$ es divisible entre 4 para todo número natural n.

c) $3^n + 7^n - 2$ es múltiplo de 8 para todo número natural n.

7. Experimentando con valores pequeños de n deduzca una fórmula para cada una de las siguientes expresiones. Luego, use inducción para verificar su fórmula.

   a) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$

   b) $2 + 6 + 18 + ... + 2 \cdot 3^{n-1}$

8. Utilice inducción para demostrar que n líneas rectas en el plano lo dividen en $\left(n^2 + n + 2\right)/2$ regiones. Suponga que no hay dos líneas paralelas y que no hay tres líneas con un punto en común.

9. Dados n ceros y n unos distribuidos de cualquier manera alrededor de un círculo (como los números en un reloj), demuestre, por inducción sobre n, que es posible comenzar en algún número y proceder en sentido horario alrededor del círculo hasta la posición inicial, de tal modo que en cualquier punto durante el ciclo se hayan visto al menos la misma cantidad de ceros que de unos.

10. Considere la función proposicional

$$P(n) : n(n-1) + 41 \textit{ es un número primo.}$$

Sabiendo que dicha función da una proposición verdadera al menos cuando n es un número entero positivo menor o igual que 40 ¿permite el principio de inducción matemática asegurar que la proposición

"*Para todo número entero positivo* n, $P(n)$"

es verdadera?

11. Considere la función proposicional

$$P(n) : 3 + 5 + ... + (2n+1) = (n+1)^2$$

Demuestre que el paso inductivo del principio de inducción matemática se satisface pero el paso base falla.

12. Considere la secuencia $c_1, c_2, ...$ definida por las ecuaciones

$$c_1 = 0, \qquad c_n = c_{\lfloor n/2 \rfloor} + n^2 \quad \text{para } n > 1.$$

   a) Calcule c_2, c_3, c_4 y c_5.

   b) Pruebe que $c_n < 4n^2$ para todo número entero $n \geq 1$.