MATEMÁTICA DISCRETA
Segundo cuatrimestre - Año 2015

Práctico 2

CONJUNTOS

1. Indique cuáles de los siguientes conjuntos son iguales a $\{1,2,3\}$:

   $A = \{3,2,1\}$ $\qquad B = \{3,2,1,2,3\}$ $\qquad C = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 9\right\}$ $\qquad D = \mathbb{N} \cap (-\infty, 7/2]$

2. Para el conjunto $X = \{t, \{t\}\}$ determine el valor de verdad (V o F) de cada una de las siguientes afirmaciones:

   a) $\{\{t\}\} \subseteq X$ $\square$ *b)* $X \subseteq X$ $\square$ *c)* $\{t\} \in X$ $\square$ *d)* $\{\{t\}\} \in X$ $\square$

   e) $\emptyset \subseteq X$ $\square$ *f)* $\{t\} \in X$ $\square$ *g)* $\emptyset \in X$ $\square$ *h)* $\{\{t\}, t\} \subseteq X$ $\square$

3. Establezca el *universo* como el conjunto $\mathcal{U} = \{1,2,3,...,10\}$. Sean

   $$A = \{1,4,7,10\}, \qquad B = \{1,2,3,4,5\} \qquad \text{y} \qquad C = \{2,4,6,8\}.$$

   Encuentre los siguientes conjuntos:

   a) $A \cup B$ *b)* $B \cap C$ *c)* $A - B$ *d)* $B - A$ *e)* $\overline{A}$ *f)* $\overline{\mathcal{U}}$ *g)* $\overline{\emptyset}$

   h) $B \cap \emptyset$ *i)* $B \cap \mathcal{U}$ *j)* $A \cup \emptyset$ *k)* $A \cup \mathcal{U}$

   l) $A \cap (B \cup C)$ *m)* $\overline{B} \cap (C - A)$ *n)* $\overline{A \cap B} \cup C$ *o)* $(A \cup B) - (C - B)$

   Definición: La *diferencia simétrica* de dos conjuntos X e Y es el conjunto

   $$X \triangle Y = \{x \mid x \in X \cup Y \ \text{ y } \ x \notin X \cap Y\},$$

   es decir, consiste de todos los elementos que pertenecen a X o a Y pero no a ambos.

   p) $B \triangle C$ *q)* $A \triangle A$ *r)* $A \triangle \overline{A}$ *s)* $A \triangle \mathcal{U}$ *t)* $A \triangle \emptyset$

4. Dibuje un *diagrama de Venn* y sombree el conjunto indicado en cada caso.

   a) $\overline{A} - B$ *b)* $(A \cup B) - B$ *c)* $A \triangle \overline{B}$ *d)* $B \cap \overline{C \cup A}$

   e) $\left((C \cap A) - \overline{B - A}\right) \cap C$ *f)* $\left(B - \overline{C}\right) \cup \left(\left(B - \overline{A}\right) \cap (C \cup B)\right)$

5. Considere un grupo de 191 estudiantes, de los cuales 10 toman clases de francés, negocios y música; 36 están francés y también en negocios; 20 en francés y en música; 18 en negocios y en música; en total, 65 van a francés, 76 a negocios y 63 a música.

   a) ¿Cuántos cursan francés y música pero no negocios?

   b) ¿Cuántos cursan negocios pero no francés ni música?

   c) ¿Cuántos cursan francés o negocios (o ambos)?

d) ¿Cuántos cursan música o francés (o ambos) pero no negocios?

e) ¿Cuántos no toman ninguna de las tres materias?

6. Considere tres programas de televisión: A, B y C. Una encuesta de 151 personas reveló que 68 ven A, 61 ven B, 52 ven C, 16 ven tanto A como B, 25 ven A y C, 19 ven B y C, y 26 no ven ninguno de estos programas. ¿Cuántas personas ven los tres programas?

7. Para todos los conjuntos A, y B se cumple que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

a) Argumente la validez de esta fórmula.

b) Deduzca una fórmula similar para $|A \cup B \cup C|$ que se cumpla para todos los conjuntos A, B y C.

8. Dado el conjunto $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

a) ¿Cuántos elementos tiene el *conjunto potencia* (o *conjunto de partes*) de A?

b) Liste los elementos de $\mathcal{P}(A)$.

c) ¿Cuántos subconjuntos propios tiene A?

d) ¿Cuáles son los subconjuntos propios de A?

e) Liste todas las particiones de A.[1]

9. Sean $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a\}$ y $Z = \{\alpha, \beta\}$. Describa *por extensión* (listando sus elementos) cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $X \times Y$ *b*) $Y \times X$

(¿Tienen $X \times Y$ e $Y \times X$ igual número de elementos? ¿Son conjuntos iguales?)

c) $X \times Z$ *d*) $Z \times Z$ *e*) $X \times Y \times Z$ *f*) $Y \times X \times Y \times Z$

10. Use inducción matemática para argumentar que si $X_1, X_2, ..., X_n$ son conjutos finitos, entonces

$$|X_1 \times X_2 \times ... \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot ... \cdot |X_n|.$$

11. Complete la demostración del **Teorema 2.1.12**.

[1] El número de particiones de un conjunto de n elementos está dado por el $n-$ésimo número de Bell. Los números de Bell, comenzando con $B_0 = B_1 = 1$, satisfacen la siguiente fórmula recursiva:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \qquad (n = 1, 2, ...),$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

indica la cantidad de subconjuntos de k elementos no repetidos, elegidos entre los n dados, que pueden formarse.

12. Utilice inducción matemática para probar que si $X_1, X_2, ..., X_n$ y X son conjutos, entonces

    a) $X \cap (X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n) = (X \cap X_1) \cup (X \cap X_2) \cup ... \cup (X \cap X_n)$.
    b) $\overline{X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_n} = \overline{X_1} \cup \overline{X_2} \cup ... \cup \overline{X_n}$.

13. En cada uno de los siguientes ítems, si la afirmación es verdadera, pruébela; si no lo es, muestre su falsedad exhibiendo un contraejemplo. En todos los casos suponga que los conjuntos X, Y y Z están incluidos en el universal $\mathcal{U}$ y que el universo para productos cartesianos es $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

    a) Para todos los conjuntos X e Y, X es un subconjunto de Y o Y es un subconjunto de X.
    b) $X \cap (Y - Z) = (X \cap Y) - (X \cap Z)$ para todos los conjuntos X, Y y Z.
    c) $X \cap (Y \times Z) = (X \cap Y) \times (X \cap Z)$ para todos los conjuntos X, Y y Z.
    d) $\overline{X \cap Y} \subseteq X$ para todos los conjuntos X e Y.
    e) $X \cap Y \subseteq Y$ para todos los conjuntos X e Y.
    f) $(X \cap Y) \cup (Y - X) = Y$ para todos los conjuntos X e Y.
    g) $\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$ para todos los conjuntos X e Y.
    h) $X \times \emptyset = \emptyset$ para todo conjunto X.

14. Pruebe que si A, B y C son conjuntos que satisfacen $A \triangle C = B \triangle C$, entonces $A = B$.