MATEMÁTICA DISCRETA
Segundo cuatrimestre - Año 2015

Práctico 5 - Parte I

RELACIONES DE RECURRENCIA: INTRODUCCIÓN

1. En cada caso, encuentre una relación de recurrencia y condiciones iniciales que generen una sucesión que comience con los términos dados.

   a) $3, 7, 11, 15, ...$
   b) $3, 6, 9, 15, 24, 39, ...$
   c) $1, 1, 2, 4, 16, 128, 4096, ...$

2. Suponga que una persona invierte \$3000 al 12 % de interés anual compuesto en un plazo fijo que se renueva cada trimestre. Sea A_n la cantidad de dinero al final de n años.

   a) Encuentre una relación de recurrencia para la sucesión $A_0, A_1, A_2, ...$
   b) Encuentre una condición inicial para la sucesión $A_0, A_1, A_2, ...$
   c) Encuentre A_1, A_2 y A_3.
   d) Encuentre una fórmula explícita para A_n.
   e) ¿Cuánto tiempo tomará que esta persona duplique su inversión inicial?

3. Suponga que una persona invierte \$2000 cada año a un interés anual compuesto del 10 %. Sea A_n la cantidad de dinero al final de n años.

   a) Encuentre una relación de recurrencia para la sucesión $A_0, A_1, A_2, ...$
   b) Encuentre una condición inicial para la sucesión $A_0, A_1, A_2, ...$
   c) Encuentre A_1 y A_2.
   d) ¿Cuánto dinero recupera esta persona si al finalizar el tercer año decide retirarlo y no volver a invertir?
   e) Encuentre una fórmula explícita para A_n.

4. Sea P_n el número de permutaciones de n objetos diferentes.

   a) Encuentre una relación de recurrencia y una condición inicial para la sucesión $P_1, P_{2,....}$
   b) Encuentre una fórmula explícita para P_n.

5. Suponga que tiene n pesos y que, mientras le alcance el dinero, cada día compra una de las siguientes bebidas: jugo (\$1), leche (\$2) o cerveza (\$2). Si G_n denota el número de maneras de gastar todo el dinero, argumente la validez de la siguiente relación de recurrencia para $n \geq 1$:

$$G_n = G_{n-1} + 2G_{n-2}.$$

6. Sea R_n el número de regiones en las que n rectas dividen a un plano. Suponga que cada par de rectas se cortan en un punto, pero nunca se cortan tres o más rectas en un mismo punto. Derive una relación de recurrencia para la sucesión $R_1, R_2, ...$

7. Considere la sucesión $g_1, g_2, ...$ definida por la relación de recurrencia

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + 1 \quad \text{para } n \geq 3,$$

y las condiciones iniciales

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 3.$$

Utilizando inducción matemática o de otra manera, demuestre que

$$g_n = 2f_{n+1} - 1 \quad \text{para } n \geq 1,$$

donde $f_1, f_2, ...$ es la sucesión de Fibonacci.

8. Inspeccionando con valores pequeños de n, proponga una relación de recurrencia para $C(n, k)$, el número de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos.

MATEMÁTICA DISCRETA
Segundo cuatrimestre - Año 2015

Práctico 5 - Parte II

RELACIONES DE RECURRENCIA: SOLUCIÓN

1. Para cada una de las siguientes relaciones de recurrencia diga si es *homogénea lineal con coeficientes constantes* y, en caso de serlo, indique su orden.

   a) $a_n = -3a_{n-1}$
   b) $a_n = 2na_{n-1}$
   c) $a_n = a_{n-1} + n$
   d) $a_n = 7a_{n-2} - 6a_{n-3}$
   e) $a_n = a_{n-1} + 1 + 2^{n-1}$
   f) $a_n = (\lg 2)\, a_{n-1} + \pi a_{n-2}$
   g) $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2}$
   h) $a_n = a_{n-1} + 5a_{n-2} - 3a_{n-3}$

2. En cada caso, resuelva la relación indicada para las condiciones iniciales que se señalan.

   a) Ejercicio 1, a); $a_0 = 2$
   b) Ejercicio 1, b); $a_0 = 1$
   c) Ejercicio 1, c); $a_0 = 0$
   d) $a_n = 2^n a_{n-1}$, $n > 0$; $a_0 = 1$
   e) $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$; $a_0 = 1$, $a_1 = 0$
   f) $9a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$; $a_0 = 6$, $a_1 = 5$

3. Resuelva la relación de recurrencia dada en el ejercicio 5 de la parte I de este práctico.

4. Resuelva la relación de recurrencia dada en el ejercicio 6 de la parte I de este práctico.

5. La población de Utopía aumenta en un 5 % cada año. En el año 2000 la población era de 10,000. ¿Cuál era la población en 1970?

6. Considere una situación en la que dos amigos, Tito y Samuel, lanzan monedas no cargadas. Si las monedas caen ambas de cara o ambas de cruz, Tito gana; en otro caso, Samuel gana. Sea p_n la probabilidad de que Tito gane todas las monedas de Samuel si Tito comienza con n monedas.

   a) Encuentre una relación de recurrencia para p_n.
   b) ¿Cuál es el valor de p_0?

   Suponga que Tito comienza con t monedas y Samuel con s monedas.

   c) ¿Cuál es el valor de p_{s+t}?

d) Resuelva la relación de recurrencia del ítem a).

e) Encuentre la probabilidad de que Tito gane todas las monedas de Samuel.

7. Algunas veces, una relación de recurrencia que no es una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes se puede transformar en una ecuación de este tipo. En cada uno de los siguientes casos, realice la sustitución que se indica y resuelva la relación de recurrencia resultante. Después, encuentre la solución de la relación de recurrencia original.

   a) $\sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n-1}} + 2\sqrt{a_{n-2}}$, con condiciones iniciales $a_0 = a_1 = 1$.
   Haga la sustitución $b_n = \sqrt{a_n}$.

   b) $a_n = \sqrt{\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}}$, con condiciones iniciales $a_0 = 8$, $a_1 = 1/\left(2\sqrt{2}\right)$.
   Tome logaritmos en ambos lados y haga la sustitución $b_n = \lg a_n$.

8. Demuestre que
$$f_{n+1} \geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \quad \text{para } n \geq 1,$$
donde f denota la sucesión de Fibonacci.

9. Suponga que las dos raíces de $t^2 - c_1 t - c_2 = 0$ son iguales a r, y que a_n satisface
$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}, \quad a_0 = C_0, \quad a_1 = C_1.$$
Demuestre que existen constantes b y d tales que
$$a_n = br^n + dnr^n \text{ para } n = 0, 1, 2, ...$$
para completar así la prueba del Teorema 7.2.14.

*10. La ecuación
$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + f(n)$$
se llama **relación de recurrencia lineal no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes**. Demuestre que si $g(n)$ es una solución de dicha relación, cualquier otra solución U de la misma es de la forma
$$U_n = V_n + g(n),$$
donde V es una solución de la ecuación homogénea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$.

*11. La ecuación
$$a_n = f(n)\, a_{n-1} + g(n)\, a_{n-2}$$
se llama **relación de recurrencia lineal homogénea de segundo orden**. Demuestre que si S y T son soluciones de dicha relación, entonces $bS + dT$, con b y d constantes, también lo es.