MATEMÁTICA DISCRETA
Segundo cuatrimestre - Año 2015

Práctico 6 - Parte III

EL PRINCIPIO DEL PALOMAR

1. Trece personas tienen nombres de pila Dora, Eva y Fernando, y apellidos Olmos, Pérez, Quintana y Rodríguez. Demuestre que al menos dos personas tienen el mismo nombre y apellido.

   Sugerencia: El *ejemplo 6.8.1* puede servir de guía.

2. Dieciocho personas tienen por nombres de pila Alfredo, Benjamín y César y por apellidos Domínguez y Puentes. Demuestre que al menos tres personas tienen el mismo nombre y apellido.

3. Un profesor cobra su salario quincenal siempre los viernes. Demuestre que en algunos meses le pagan tres veces.

4. ¿Es posible interconectar cinco procesadores de manera que exactamente dos de ellos tengan conexión directa a un mismo número de procesadores?

   Sugerencia: El *ejemplo 6.8.2* puede ayudar a entender la situación planteada.

5. Un inventario consiste en una lista de 80 artículos, cada uno marcado como "disponible" o "no disponible". Hay 50 artículos disponibles. Demuestre que hay al menos 2 artículos no disponibles en la lista que están separados exactamente por 3 o por 6 artículos.

   Sugerencia: El *ejemplo 6.8.4* puede servir de guía.

6. Lea atentamente el *ejemplo 6.8.5* y responda:

   a) ¿Se puede afirmar la conclusión "hay tres (fotografías) que son mutuamente similares o bien tres que son mutuamente no similares" si hay sólo 5 fotografías?

   b) ¿Se puede afirmar la misma conclusión si hay más de 6 fotografías?

7. Sea $A = \{1, 2, ..., 2n + 1\}$ donde n es algún número natural.

   a) Dé un argumento que muestre que si X es cualquier subconjuto de A de $(n + 2)$ elementos y m es el elemento más grande en X, existen i y j distintos en X con $m = i + j$. Para ello defina, para cada $k \in X - \{m\}$,

   $$a_k = \begin{cases} k & \text{si } k \leq m/2 \\ m - k & \text{si } k > m/2 \end{cases}$$

   y realice los siguientes ítems:

   (*i*) Indique cuántos elementos hay en el dominio de a.

   (*ii*) Demuestre que el recorrido de a está contenido en $\{1, 2, ..., n\}$.

   (*iii*) Explique por qué los ítems (*i*) e (*ii*) implican que $a_i = a_j$ para algún $i \neq j$.

(*iv*) Explique por qué el ítem (*iii*) implica que existen i y j distintos en X con $i + j = m$.

b) Dé un ejemplo de un subconjuto X de A de $(n + 1)$ elementos que tenga la propiedad: no hay dos elementos distintos i y j en X para los que $i + j \in X$.

8. Una rejilla de $2k \times 2k$ se divide en $4k^2$ cuadrados y 4 subrejillas de $k \times k$.Demuestre que es imposible pintar k cuadrados en la subrejilla superior izquierda y k cuadrados en la subrejilla inferior derecha de modo que no queden dos cuadros pintados sobre la misma diagonal de la rejilla original.

   Sugerencia: Esbozar la gráfica de la rejilla correspondiente a algún valor pequeño de k (por ejemplo, $k = 3$ o $k = 4$) marcando las subrejillas indicadas puede ayudar a visualizar la situación.

   Nota: Una diagonal comienza en el cuadro de la esquina superior izquierda y corre hasta el cuadro de la esquina inferior derecha; $k - 1$ diagonales comienzan en los $k - 1$ cuadros a la derecha del cuadro de la esquina superior izquierda y corren paralelas a la primer diagonal descripta; y $k - 1$ diagonales comienzan en los $k - 1$ cuadros debajo del superior izquierdo y corren paralelas a las otras descriptas.