MATEMÁTICA DISCRETA

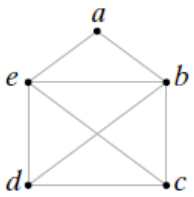
Segundo cuatrimestre – Año 2015

Práctico 7 – Parte I

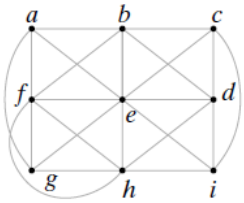
TEORÍA DE GRAFOS: INTRODUCCIÓN

1. Explique por qué ninguna de las siguientes gráficas tiene una trayectoria del vértice a al vértice a que pasa por cada arista justo una vez.

a)

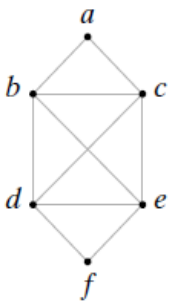


b)

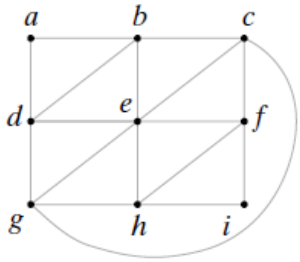


2. Pruebe que cada uno de los siguientes grafos tiene una trayectoria del vértice a al vértice a que pasa por cada arista justo una vez, encontrando la trayectoria por inspección.

a)

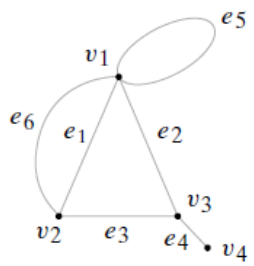


b)

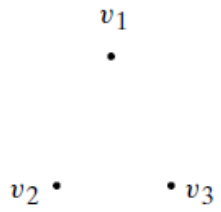


3. Para cada uno de los siguientes grafos $G=(V,E)$, encuentre V, E, todas las aristas paralelas, lazos, vértices aislados, y diga si G es un grafo simple.

a)



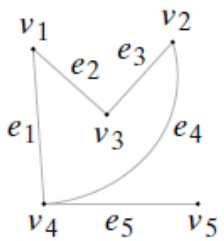
b)



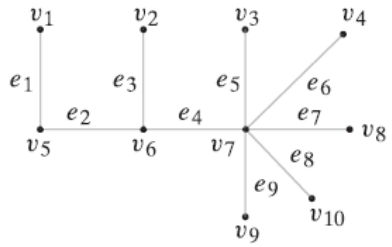
4. Dibuje un K_3 y un K_5. Encuentre una fórmula para el número de aristas en K_n.

5. Determine cuáles de los siguientes grafos son bipartitos. Si el grafo es bipartito, especifique los conjuntos ajenos de vértices.

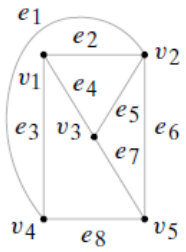
a)



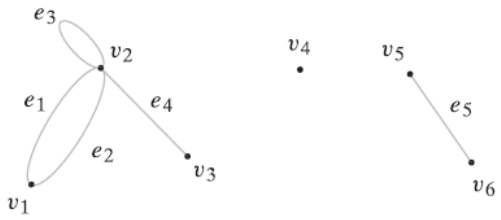
b)



c)

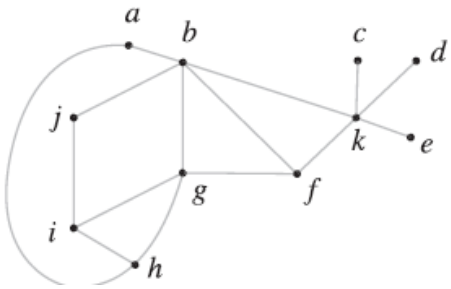


d)



6. Dibuje $K_{2,3}$ y $K_{3,3}$. Encuentre una fórmula para el número de aristas en $K_{m,n}$.

7. En el siguiente grafo cada arista conecta dos oficinas si hay un enlace de comunicaciones entre las dos. Observe que cualquier oficina se puede comunicar con cualquier otra con un enlace de comunicaciones directo o haciendo que otros pasen el mensaje.

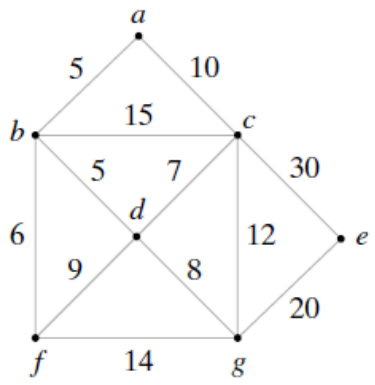


a) Muestre, dando un ejemplo, que la comunicación entre las oficinas es posible aun cuando se rompan enlaces de comunicación.

b) ¿Cuál es el número máximo de enlaces de comunicación que se pueden romper teniendo todavía comunicación entre todas las oficinas?

c) Muestre una configuración en la que se rompió el número máximo de enlaces de comunicación y todavía es posible la comunicación entre todas las oficinas.

8. En el siguiente grafo los vértices representan ciudades y los números sobre las aristas son los costos de construir las carreteras indicadas. Encuentre el sistema de carreteras menos costoso que conecte todas las ciudades.



MATEMÁTICA DISCRETA

Segundo cuatrimestre – Año 2015

Práctico 7 – Parte II

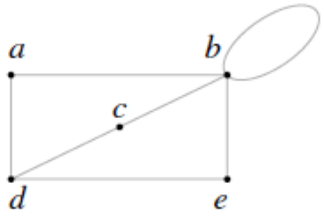
TRAYECTORIAS Y CICLOS

1. En los siguientes ítems decir si la trayectoria indicada en el grafo es

- una trayectoria simple,

- un ciclo,

- un ciclo simple.



a) (b,b)

b) (a,d,c,d,e)

c) (b,c,d,a,b,e,d,c,b)

d) (a,d,c,b,e)

e) (d)

2. En cada caso dibuje un grafo que tenga las propiedades indicadas o explique por qué no existe tal grafo.

a) Seis vértices cada uno de grado 3

a) Cuatro vértices cada uno de grado 1

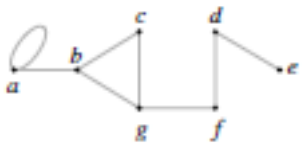
a) Cuatro aristas; cuatro vértices de grados 1, 2, 3, 4

a) Grafo simple; seis vértices con grados 1, 2, 3, 4, 5, 5

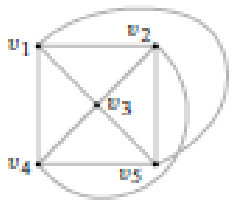
a) Grafo simple; cinco vértices con grados 2, 2, 4, 4, 4

3. En los siguientes ítems, decida si los grafos tienen un *ciclo de Euler*. Si lo tienen, muestre uno.

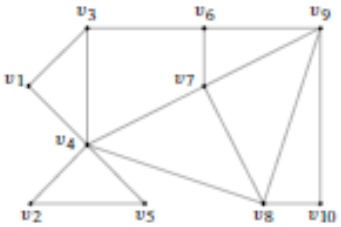
a)



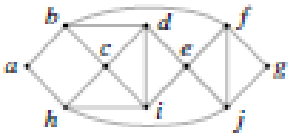
b)



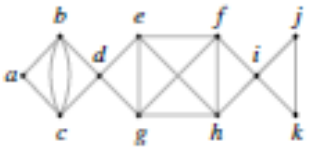
c)



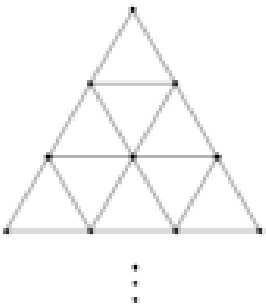
d)



e)



4. El siguiente grafo se continúa hasta una profundidad finita arbitraria. ¿Contiene el grafo un ciclo de Euler? Si la respuesta es afirmativa, describa uno.

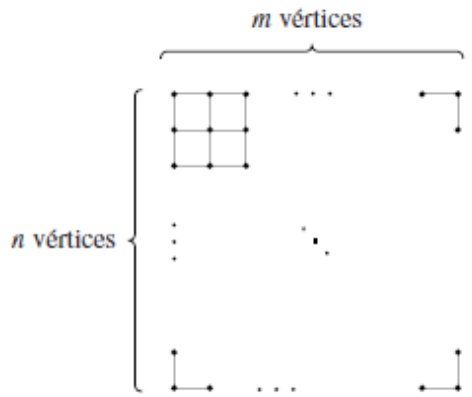


5.

a) Un grafo completo K_n, ¿cuándo contiene un ciclo de Euler?

b) Un grafo bipartito $K_{m,n}$, ¿cuándo contiene un ciclo de Euler?

6. ¿Para qué valores de *m* y *n* el siguiente grafo contiene un ciclo de Euler?



7. Sea G un grafo conexo con cuatro vértices v_1, v_2, v_3 y v_4 de grado impar. Demuestre que existen trayectorias sin aristas repetidas de v_1 a v_2 y de v_3 a v_4 tales que cada arista en G esta exactamente en una de las trayectorias.

8. Diga si cada afirmación es falsa o verdadera. Si es falsa de un contraejemplo y si es verdadera, explique.

a) Sea G un grafo y sean v y w vértices distintos. Si hay una trayectoria de v a w, existe una trayectoria simple de v a w.

b) Si un grafo contiene un ciclo que incluye todas las aristas, se trata de un ciclo de Euler.

9.

a) Sea G un grafo conexo. Suponga que una arista e está en un ciclo. Demuestre que $G - \{e\}$ sigue siendo conexo.

b) De un ejemplo de un grafo conexo tal que la eliminación de cualquier arista produzca un grafo no conexo. (Suponga que eliminar una arista no implica eliminar los vértices).

10. Un vértice v en un grafo conexo G es un punto de articulación si la eliminación de v y todas las aristas incidentes en v desconecta a G.

a) De un ejemplo de un grafo con seis vértices que tenga exactamente dos puntos de articulación.

b) De un ejemplo de un grafo con seis vértices que no tenga punto de articulación.