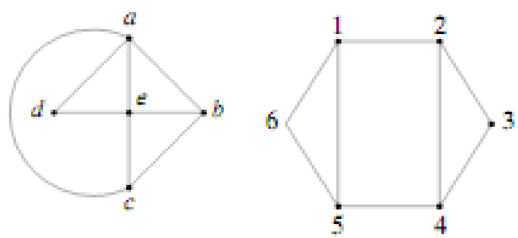
MATEMÁTICA DISCRETA
Segundo cuatrimestre - Año 2015

Práctico 7 - Parte VI

ISOMORFISMOS, HOMOMORFISMOS Y GRAFOS PLANOS.

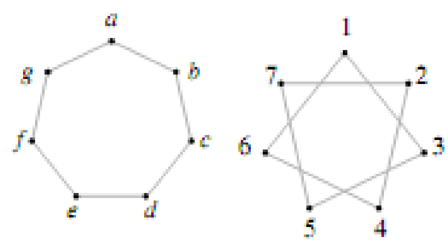
1. En cada caso, determine si los grafos G_1 y G_2 son isomorfos. Si lo son, encuentre un *isomorfismo* entre ellos; de otro modo, dé una *invariante* que los grafos no compartan.

a)



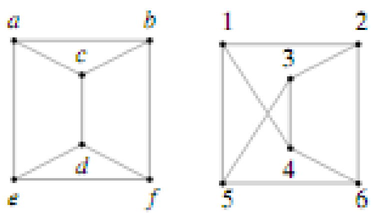
G_1 G_2

b)



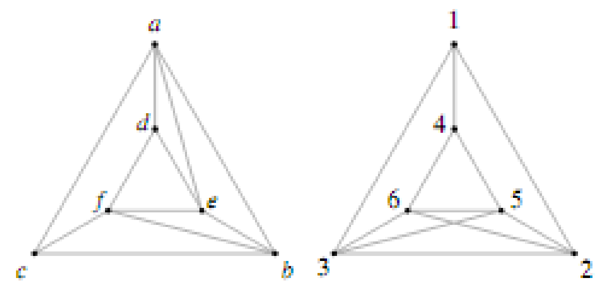
G_1 G_2

c)



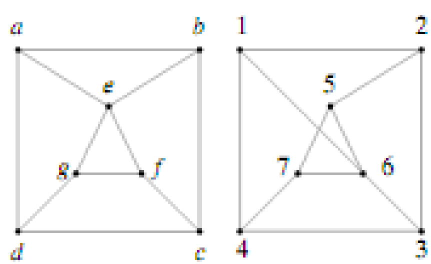
G_1 G_2

d)



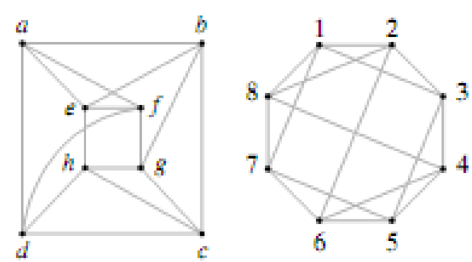
G_1 G_2

e)



G_1 G_2

f)



G_1 G_2

2. En cada ítem, determine si la propiedad dada es una *invariante*. En caso afirmativo, dé un argumento que lo pruebe; en caso contrario, exhiba un contraejemplo.

a) Tiene un ciclo simple de longitud k.

b) Tiene n vértices de grado k.

c) Tiene un ciclo de Euler.

d) Tiene un vértice dentro de algún ciclo simple.

e) Es conexo.

f) Es bipartito.

3. Dibuje todos los grafos simples no isomorfos de 3 vértices.

Definición: El *complemento* de un grafo simple G es el grafo simple $\overline{G}$ con los mismos vértices que G, tal que una arista existe en $\overline{G}$ si y sólo si no existe en G.

4. Dibuje el complemento cada uno de los grafos G_1 y G_2 del ejercicio 1-a).

*__5__. Suponga que G_1 y G_2 son grafos simples. Muestre que G_1 y G_2 son isomorfas si y sólo si $\overline{G_1}$ y $\overline{G_2}$.

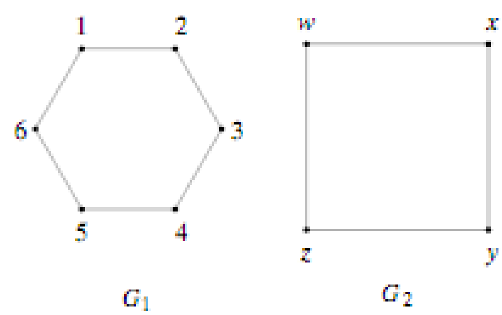
6. Se dice que un grafo simple G es *autocomplementario* si G y $\overline{G}$ son isomorfos. Dé un ejemplo de un grafo autocomplementario que tenga 4 vértices.

Definición: Un *homomorfismo* de un grafo G_1 a un grafo G_2 es una función f del conjunto de vértices de G_1 al conjunto de vértices de G_2 con la propiedad de que si v y w son adyacentes en G_1, $f(v)$ y $f(w)$ son adyacentes en G_2. Se dice que los grafos G_1 y G_2 son homomorfos.

Nota: La definición anterior es equivalente a la definición 8.7.5.

7. En cada caso, dé un ejemplo de un homomorfismo de G_1 a G_2 y otro de un homomorfismo de G_2 a G_1.

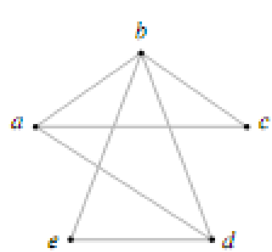
a) 

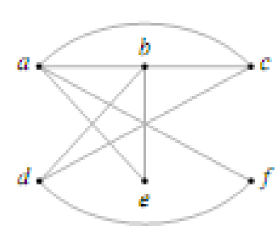
b) 

8. Para cada caso del ejercicio anterior, dé un segundo ejemplo (diferente al dado en dicho ejercicio) de homomorfismo de G_1 a G_2.

*__9__. Suponga que G_1 y G_2 son grafos simples. Muestre que si f es un homomorfismo de G_1 a G_2 y f es biyectiva, G_1 y G_2 son isomorfos.

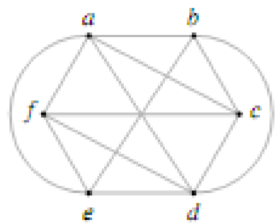
10. En cada ítem, demuestre que el grafo dado es plano dibujándolo de nuevo sin que se crucen las aristas.

a) 

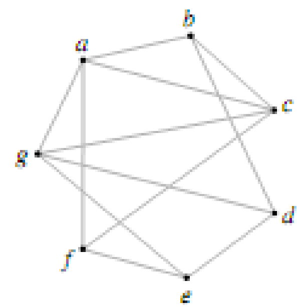
b) 

11. En cada ítem, demuestre que el grafo dado no es plano encontrando un subgrafo homomorfo a K_5 o $K_{3,3}$.

a)



b)



12. Un grafo plano conexo tiene 9 vértices que tienen grados $2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4$ y 5. ¿Cuántas aristas hay? ¿Cuántas caras tiene?

13. Demuestre que cualquier grafo que tenga 4 vértices o menos es plano.

14. Demuestre que en cualquier grafo simple, conexo y plano, $e \leq 3v - 6$. Luego, dé un ejemplo de un grafo simple, conexo y no plano para el que la desigualdad anterior no se cumpla.

15. Use el ejercicio anterior para demostrar que K_5 no es plana.