Matemática Discreta
Práctico 2: Conjuntos y Funciones

1. Indique cuáles de los siguientes conjuntos son iguales a $\{1,2,3\}$:

$$A = \{3,2,1\} \qquad B = \{3,2,1,2,3\} \qquad C = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 9\right\} \qquad D = \mathbb{N} \cap (-\infty, 7/2]$$

2. Para el conjunto $X = \{t, \{t\}\}$ determine el valor de verdad (V o F) de cada una de las siguientes afirmaciones:

$a)$ $\{\{t\}\} \subseteq X$ ☐ $\quad b)$ $X \subseteq X$ ☐ $\quad c)$ $\{t\} \in X$ ☐ $\quad d)$ $\{t\} \subseteq X$ ☐

$e)$ $\emptyset \subseteq X$ ☐ $\quad f)$ $\{\{t\}\} \in X$ ☐ $\quad g)$ $\emptyset \in X$ ☐ $\quad h)$ $\{\{t\}, t\} \subseteq X$ ☐

3. Establezca el *universo* como el conjunto $\mathcal{U} = \{1,2,3,...,10\}$. Sean

$$A = \{1,4,7,10\}, \qquad B = \{1,2,3,4,5\} \qquad \text{y} \qquad C = \{2,4,6,8\}.$$

Encuentre los siguientes conjuntos:[1]

$a)$ $A \cup B$ $\quad b)$ $B \cap C$ $\quad c)$ $A - B$ $\quad d)$ $B - A$ $\quad e)$ $\overline{A}$ $\quad f)$ $\overline{U}$ $\quad g)$ $\overline{\emptyset}$

$h)$ $B \cap \emptyset$ $\quad i)$ $B \cap U$ $\quad j)$ $A \cup \emptyset$ $\quad k)$ $A \cup U$

$l)$ $A \cap (B \cup C)$ $\quad m)$ $\overline{B} \cap (C - A)$ $\quad n)$ $\overline{A \cap B} \cup C$ $\quad o)$ $(A \cup B) - (C - B)$

$p)$ $B \triangle C$ $\quad q)$ $A \triangle A$ $\quad r)$ $A \triangle \overline{A}$ $\quad s)$ $A \triangle U$ $\quad t)$ $A \triangle \emptyset$

4. Dibuje un *diagrama de Venn* y sombree el conjunto indicado en cada caso.

$a)$ $\overline{A} - B$ $\quad b)$ $(A \cup B) - B$ $\quad c)$ $A \triangle \overline{B}$ $\quad d)$ $B \cap \overline{C \cup A}$

$e)$ $\big((C \cap A) - \overline{B - A}\big) \cap C$ $\quad f)$ $\big(B - \overline{C}\big) \cup \big(\big(B - \overline{A}\big) \cap (C \cup B)\big)$

5. Considere tres programas de televisión: A, B y C. Una encuesta de 151 personas reveló que 68 ven A, 61 ven B, 52 ven C, 16 ven tanto A como B, 25 ven A y C, 19 ven B y C, y 26 no ven ninguno de estos programas. ¿Cuántas personas ven los tres programas?

6. Para todos los conjuntos A y B se cumple que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

   a) Argumente la validez de esta fórmula.
   b) Deduzca una fórmula similar para $|A \cup B \cup C|$ que se cumpla para todos los conjuntos A, B y C.

[1] **Definición:** La *diferencia simétrica* de dos conjuntos X e Y es el conjunto

$$X \triangle Y = \{x \mid x \in X \cup Y \ \text{ y } \ x \notin X \cap Y\},$$

es decir, consiste de todos los elementos que pertenecen a X o a Y pero no a ambos.

7. Dado el conjunto $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

    a) ¿Cuántos elementos tiene el *conjunto potencia* (o *conjunto de partes*) de A?
    b) Liste los elementos de $\mathcal{P}(A)$.
    c) ¿Cuántos subconjuntos propios tiene A?
    d) ¿Cuáles son los subconjuntos propios de A?
    e) Liste todas las particiones de A.[2]

8. Sean $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a\}$ y $Z = \{\alpha, \beta\}$. Describa *por extensión* (listando sus elementos) cada uno de los siguientes conjuntos:

    $$a)\ X \times Y \qquad b)\ Y \times X$$

    (¿Tienen $X \times Y$ e $Y \times X$ igual número de elementos? ¿Son conjuntos iguales?)

    $$c)\ X \times Z \qquad d)\ Z \times Z \qquad e)\ X \times Y \times Z \qquad f)\ Y \times X \times Y \times Z$$

9. Use inducción matemática para argumentar que si $X_1, X_2, ..., X_n$ son conjutos finitos, entonces
    $$|X_1 \times X_2 \times ... \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot ... \cdot |X_n|.$$

10. Utilice inducción matemática para probar que si $X_1, X_2, ..., X_n$ y X son conjutos, entonces

    a) $X \cap (X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n) = (X \cap X_1) \cup (X \cap X_2) \cup ... \cup (X \cap X_n)$.
    b) $\overline{X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_n} = \overline{X_1} \cup \overline{X_2} \cup ... \cup \overline{X_n}$.

11. En cada uno de los siguientes ítems, si la afirmación es verdadera, pruébela; si no lo es, muestre su falsedad exhibiendo un contraejemplo. En todos los casos suponga que los conjuntos X, Y y Z están incluidos en el universal $\mathcal{U}$ y que el universo para productos cartesianos es $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

    a) Para todos los conjuntos X e Y, X es un subconjunto de Y o Y es un subconjunto de X.
    b) $X \cap (Y - Z) = (X \cap Y) - (X \cap Z)$ para todos los conjuntos X, Y y Z.
    c) $X \cap (Y \times Z) = (X \cap Y) \times (X \cap Z)$ para todos los conjuntos X, Y y Z.

[2]El número de particiones de un conjunto de n elementos está dado por el $n-$ésimo número de Bell. Los números de Bell, comenzando con $B_0 = B_1 = 1$, satisfacen la siguiente fórmula recursiva:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \qquad (n = 1, 2, ...),$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

indica la cantidad de subconjuntos de k elementos no repetidos, elegidos entre los n dados, que pueden formarse.

d) $\overline{X \cap Y} \subseteq X$ para todos los conjuntos X e Y.

e) $X \cap Y \subseteq Y$ para todos los conjuntos X e Y.

f) $(X \cap Y) \cup (Y - X) = Y$ para todos los conjuntos X e Y.

g) $\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$ para todos los conjuntos X e Y.

h) $X \times \emptyset = \emptyset$ para todo conjunto X.

12. Pruebe que si A, B y C son conjuntos que satisfacen $A \triangle C = B \triangle C$, entonces $A = B$.

13. Considere los siguientes conjuntos de pares ordenados:

$a = \{(1,\alpha),(2,\alpha),(3,\gamma),(4,\beta)\}$

$b = \{(1,\gamma),(2,\alpha),(3,\beta),(4,\gamma),(2,\delta)\}$

$c = \{(1,\gamma),(2,\delta),(3,\alpha),(4,\beta)\}$

$d = \{(1,\delta),(2,\delta),(4,\alpha)\}$

$e = \{(1,\beta),(2,\beta),(3,\beta),(4,\beta)\}$

Para cada uno de ellos:

(i) Dibuje el correspondiente diagrama de flechas entre los conjuntos $X = \{1,2,3,4\}$ e $Y = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ y determine si define una una función de X a Y.

(ii) Si la respuesta en (i) es afirmativa, indique su dominio y su rango y determine si se trata de una función inyectiva, suprayectiva o ambas (biyectiva).

(iii) Si es una función biyectiva, describa la función inversa como un conjunto de pares ordenados, dibuje el correspondiente diagrama de flechas e indique su dominio y su rango.

14. A partir de la función

$$f(x) = x^2,$$

de $X = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ a $\mathbb{Z}$:[3]

a) Escriba a f como un conjunto de pares ordenados por comprensión.

b) Escriba a f como un conjunto de pares ordenados por extensión.

c) Dibuje el diagrama de flechas de f. ¿Es f uno a uno? ¿Es f sobre?

15. A partir de la función

$$f(x) = 4x \bmod 6,$$

de $X = \{0,1,2,3,4,5\}$ en sí mismo:

a) Escriba a f como un conjunto de pares ordenados por comprensión.

b) Escriba a f como un conjunto de pares ordenados por extensión.

[3] $\mathbb{Z}$ denota al conjunto de todos los números enteros.

c) Dibuje el diagrama de flechas de f. ¿Es f uno a uno? ¿Es f sobre?

16. Grafique cada una de las siguientes funciones con dominio $\mathbb{R}$:[4]

$$a)\ f(x) = \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \qquad b)\ f(x) = x - \lfloor x \rfloor \qquad c)\ f(x) = \lceil x^3 \rceil$$

17. Pruebe que si f es una función uno a uno y sobre de X a Y, entonces

$$\{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

es una función uno a uno y sobre de Y a X.

18. En cada caso, si la afirmación es verdadera para todos los números reales x, pruébela; de otra manera, dé un contraejemplo.

    a) $\lceil x + 3 \rceil = \lceil x \rceil + 3$

    b) $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$

19. Considere las siguientes funciones con dominio $\mathbb{R}$:

$$a)\ f(x) = 6x - 9 \qquad b)\ f(x) = 3x^2 + 1 \qquad c)\ f(x) = 2x^3 - 4 \qquad d)\ f(x) = \operatorname{sen} x$$

$$^*e)\ f(x) = 3^x - 2 \qquad ^*f)\ f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

Para cada una de ellas:

(i) Determine si es uno a uno (inyectiva) y demuestre su respuesta.

(ii) Determine si es sobre (suprayectiva) en el conjunto de los números reales y demuestre su respuesta.

20. Las funciones siguientes son uno a uno en el dominio especificado X.[5] Si se hace $Y = \mathit{rango}(f)$ se obtiene una biyección de X a Y. Encuentre la función inversa de cada una de ellas.

$$a)\ f(x) = 4x^3 - 5,\ \ X = \mathbb{R} \qquad b)\ f(x) = 3 + \frac{1}{x},\ \ X = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$c)\ f(x) = 3\log_2 x,\ \ X = \mathbb{R}^+ \qquad d)\ f(x) = 6 + 2^{7x-1},\ \ X = \mathbb{R}$$

21. Sean $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ y $Z = \{w, x, y, z\}$. A partir de las funciones

$$g = \{(1, b), (2, c), (3, a)\}$$

de X a Y y

$$f = \{(a, x), (b, x), (c, z), (d, w)\}$$

de Y a Z, escriba $f \circ g$ como un conjunto de pares ordenados y dibuje su diagrama de flechas.

[4] $\mathbb{R}$ denota al conjunto de todos los números reales.
[5] $\mathbb{R}^+$ denota al conjunto de todos los números reales positivos.

22. Sean f, g y h funciones de $\mathbb{N}$ a los subconjuntos de $\mathbb{N}$ definidos por las ecuaciones[6]

$$f(n) = n^2, \qquad g(n) = 2^n, \qquad h(n) = 3n - 1.$$

Encuentre las composiciones $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$, $h \circ h$ y $f \circ h \circ g$.

23. Sean f y g funciones de $\mathbb{R}^+$ a los subconjuntos de $\mathbb{R}^+$ definidos por las ecuaciones

$$f(x) = \lfloor 2x \rfloor, \qquad g(x) = x^2.$$

Encuentre las composiciones $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$ y $g \circ f$.

24. En cada caso, descomponga la función F en dos funciones más sencillas f y g tales que $f \circ g = F$.

   a) $F(x) = \frac{1}{2x^2}$
   b) $F(x) = 2\mathrm{sen}x$

25. En cada caso, descomponga la función F en tres funciones más sencillas f , g y h tales que $f \circ g \circ h = F$.

   a) $F(x) = (3 + \mathrm{sen}x)^4$
   b) $F(x) = \frac{1}{(\cos 6x)^3}$

26. Sea g una función de X a Y y sea f una función de Y a Z. Para cada una de las siguientes afirmaciones, si es verdadera, demuéstrela; en otro caso, proporcione un contraejemplo.

   a) Si f es uno a uno, $f \circ g$ es también uno a uno.
   b) Si g es uno a uno, $f \circ g$ es también uno a uno.
   c) Si f y g son uno a uno, $f \circ g$ es también uno a uno.
   d) Si f es sobre, $f \circ g$ es también sobre.
   e) Si g es sobre, $f \circ g$ es también sobre.
   f) Si f y g son sobre, $f \circ g$ es también sobre.
   g) Si $f \circ g$ es uno a uno, entonces f es uno a uno.
   h) Si $f \circ g$ es uno a uno, entonces g es uno a uno.
   i) Si $f \circ g$ es sobre, entonces f es sobre.
   j) Si $f \circ g$ es sobre, entonces g es sobre.

[6] $\mathbb{N}$ denota al conjunto de todos los números enteros positivos, llamados *números naturales*.

27. Sea
$$g=\{(1,a),(2,c),(3,c)\}$$
una función de $X=\{1,2,3\}$ a $Y=\{a,b,c,d\}$. Sean $S=\{1\}$, $T=\{1,3\}$, $U=\{a\}$ y $V=\{a,c\}$. Encuentre $g(S)$, $g(T)$, $g^{-1}(U)$ y $g^{-1}(V)$. [7]

28. Sea f una función de X a Y. Pruebe que f es inyectiva si y sólo si
$$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$$
para todos los subconjuntos A y B de X.

29. Sea f una función de X sobre Y. Sea
$$\mathcal{S}=\left\{f^{-1}(\{y\})\mid y\in Y\right\}.$$
Demuestre que $\mathcal{S}$ es una partición de X.

30. Pruebe las siguientes propiedades de la función carácterística: [8]

    a) $C_{\overline{X}}(x)=1-C_X(x)$ para todo $x\in\mathcal{U}$.
    b) $C_{X\cap Y}(x)=C_X(x)\,C_Y(x)$ para todo $x\in\mathcal{U}$.
    c) $C_{X\cup Y}(x)=C_X(x)+C_Y(x)-C_X(x)\,C_Y(x)$ para todo $x\in\mathcal{U}$.
    d) Si $X\subseteq Y$ entonces $C_X(x)\leq C_Y(x)$ para todo $x\in\mathcal{U}$.

31. Sea $\mathcal{U}$ un conjunto universal. Pruebe que la función f de $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ al conjunto de funciones características en $\mathcal{U}$,
$$f(X)=C_X$$
es una biyección.

32. En cada ítem de (a) a (d), considere la función f definida en $X\times X$.

(i) Determine si f es un operador binario en el conjunto X. Justifique su respuesta.

(ii) En caso de ser f un operador binario en X, analice si es conmutativo. [9]

    a) $f(x,y)=x-y,\quad X=\{1,2,3,...\}$

[7]**Definición:** Si f es una función de X a Y, $A\subseteq X$ y $B\subseteq Y$,
$$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}\quad\text{y}\quad f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\}.$$
$f(A)$ es la *imagen* de A bajo f y $f^{-1}(B)$ es la *imagen inversa* de B bajo f.

[8]**Definición:** Sea $\mathcal{U}$ un conjunto universal y sea $X\subseteq\mathcal{U}$. La función
$$C_X(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in X\\ 0 & \text{si } x\notin X\end{cases}$$
se llama *función característica* de X en $\mathcal{U}$.

[9]**Nota:** El operador binario f en es *conmutativo* si $f(x,y)=f(y,x)\,\forall x,y\in X$.

$b)$ $f(x,y) = x \cup y, \quad X = \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$

$c)$ $f(x,y) = x/y, \quad X = \{0,1,2,...\}$

$d)$ $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy, \quad X = \{1,2,...\}$